УДК 53.082.8, 51-73, 517.9

С. И. Геращенко, С. М. Геращенко, Е. В. Кучумов

АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ СОСТОЯНИЕ МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ИОННЫМ ТИПОМ ПРОВОДИМОСТИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Актуальность построения и изучения свойств систем нелинейных интегродифференциальных уравнений характеризуется их возможностью описывать сложные физико-химические (медико-биологические) диссипативные структуры, т.е. так называемые тьюринговые модели. Важным частным случаем таких моделей являются медико-биологические объекты с ионным типом проводимости. Особый практический интерес представляет мониторинг состояния данных объектов в контексте новых возможностей для медицинского исследования и анализа. Многое из направлений мониторинга и исследования математически формулируется в виде обратной коэффициентной задачей. Целью данной работы является теоретический анализ особенностей системы интегродифференциальных уравнений, построенной в ранних работах с учетом специфики моделирования состояния медико-биологических объектов с ионным типом проводимости, а также формулировки обратных задач на их основе.

Материалы и методы. Для выделения особенностей рассматриваемой системы нелинейных интегродифференциальных уравнений использовался теоретический и практический материал экспериментальных методов аналитической химии на основе электрохимического анализа (хронопотенциометрия, вольтамперометрия, полярография и т.д.). Учитывалась специфика геометрии электрохимической ячейки (электродов, объемов систем, специальных структур) и режимов процессов измерения, а также протекающих электрохимических реакций. При изучении вопросов моделирования диссипативных структур рассмотрено асимптотическое приближение в виде стационарного случая системы исследуемых уравнений в геометрии плоского конденсатора. Особенности постановки обратной задачи для системы интегродифференциальных уравнений указаны в терминах стандартной теории некорректных задач.

Результаты. Проанализирована связь особенностей специфичной геометрии электрохимических ячеек с ключевым интегральным слагаемым системы нелинейных интегродифференциальных уравнений. Обоснована роль исследуемой системы в объединении различных электрохимических и электрофизических эффектов, разбитых за счет существенной локализации их в геометрии электрохимической ячейки. Указаны недостатки моделирования на основе системы для непрерывной среды: нельзя естественным образом ввести процессы сорбции и десорбции частиц на поверхности электродов. Предложен способ, позволяющий частично обойти этот недочет, а также описать зарядовую структуру в объеме электрода и его взаимодействие с ионами электролита. Составлена система с краевыми условиями для простой двухкомпонентной реакции $O + ze^- \underset{\vec{k}_e}{\overset{\vec{k}_e}{\rightleftarrows}} R$, включая стационарный случай, с учетом нелинейных членов.

Выводы. Одним из важных составляющих в системе уравнений является интегральный член на основе функции Грина, даже упрощенный вид которого

позволяет учесть наличие двойного электрического слоя возле поверхности электрода. Его более точное и строгое построение в перспективе связывает систему интегродифференциальных уравнений с эффектом сорбции-десорбции и взаимодействия внутренней структуры электрода с ионами и молекулами электролита. Построенная система уравнений на основе простых примеров химической реакции и геометрии электрохимической ячейки показала, что стационарный предел является случаем диссипативных структур, которые нельзя получить с применением простых линейных уравнений из классического курса электрохимии. Обратная задача для исследуемой системы ставится в стандартной формулировке, однако имеется особенность в виде наличия интегралов в форме Фредгольма, а не с сингулярными и гиперсингулярными ядрами, как следовало из общей функции Грина.

Ключевые слова: система интегродифференциальных уравнений, математическое моделирование, электрохимическая реакция, электрохимическая ячейка, нелинейные диссипативные структуры, обратная задача.

S. I. Gerashchenko, S. M. Gerashchenko, E. V. Kuchumov

ANALYSIS OF SPECIAL ASPECTS OF THE INTEGRODIFFERENTIAL EQUATION SYSTEM DESCRIBING BIOMEDICAL OBJECTS' CONDITION WITH IONIC CONDUCTION

Abstract.

Background. The topicality of building and researching the features of the nonlinear integrodifferential equation systems is characterized by their ability to describe complex physicochemical (biomedical) dissipative structures, i.e. the so-called Turing's models. Biomedical objects with ionic conduction are an important special case of these models. The status monitoring of that objects for the purpose of obtaining new abilities for the medical trial and analysis is a special practical interest. Many ways of monitoring and researching are expressed by the inverse coefficient problem. The goal of this article is to theoretically analyze special aspects of the integrodifferential equation system, which have been introduced in the previous papers with respect to particular characteristics of status modeling of biomedical objects with ionic conduction, and to formulate the inverse problems on the basis thereof.

Materials and methods. Theoretical and practical facts of the experimental methods of analytic chemistry based on the electrochemical analysis (chronopotentiometry, voltammetry, polarography etc.) were used to understand the special aspects of the nonlinear integrodifferential equation system. Specifics of the geometry of an electrochemical cell (electrodes, volumes of systems, special structures) and measure procedure modes, as well as electrochemical reactions were taken into account. The asymptotic approach in the form of a stationary case of researching the equation system with plane condenser geometry was examined in the studies of problems of dissipative structures modeling. The specifics of the inverse problems formulation by means of the integrodifferential equation system were determined in terms of the standard incorrect problem theory.

Results. A link between the aspects of specific electrochemical cell geometry and a key integral item from the nonlinear integrodifferential equation system were analyzed. The contribution of researching the equation system into unification of different electrochemical and physical phenomena, separated by significant localiza-

tion thereof in electrochemical cell geometry, was established. The authors determined the drawbacks of modeling by the equation system for continuous environment: it is impossible to naturally conduct the processes of sorption and desorption on electrode surface. The authors suggested a method which makes it possible to partially evade the drawback and also to describe the electrode volume charge texture and its mutual effect with electrolyte ions. The equation system for a simple two-component reaction $O + ze^- \underset{\vec{k}_e}{\overset{\vec{k}_e}{\rightleftarrows}} R$ with boundary conditions and nonlinear members was comprised including a stationary case.

Conclusions. One of the most important terms of the equation system is the integral members based on the Green's function, even the simplified form of which could describe the double-electric layer near the electrode surface. Its more precise and strict building, in perspective, links the integrodifferential equation system with the phenomenon of sorption-desorption and interaction of the electrode bulk with ions and molecules into electrolyte. The built system, based on simple cases of chemical reaction and electrochemical cell geometry, showed that the stationary limit is a case of dissipation structures which can't be obtained by means of elementary linear equations from the classical course of electrochemistry. The invers problem for the system under investigation is formulated in a standard form except that there is a special aspect in the shape of availability of an integral in the Fredholm's form, not with singular and weakly singular as it complies with the standard form of the Green's kernel.

Key words: system of integrodifferential equations, mathematical modeling, electrochemical reaction, electrochemical cell, nonlinear dissipative structures, inverse problem.

В работах [1, 2] была построена замкнутая математическая модель, выражаемая системой нелинейных интегродифференциальных уравнений в частных производных следующего вида:

$$z_i F \frac{\partial c_i}{\partial t} + z_i F u_i \left\{ \vec{\nabla} c_i \cdot \left[\frac{4\pi}{\varepsilon} F \iiint\limits_V \vec{\nabla} G(\mathbf{r};\mathbf{r}') \left(\sum_{k=1}^{N} z_k c_k(t,\mathbf{r}') \right) d\mathbf{r}' + \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right] + \right.$$

$$\left. + c_i \frac{4\pi}{\varepsilon} F \left(\sum_{k=1}^{N} z_k c_k \right) \right\} - \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} D_{ik} \vec{\nabla} c_k \right) + z_i F \vec{\nabla} \cdot \left(c_i \mathbf{v}_C \right) =$$

$$= z_i F \sum_{k=1}^{B} \alpha_{i,k} \kappa_{VGi,k} \prod_{l}^{N} c_l^{\vartheta_{l,k}}, \qquad (1)$$

где $i = \overline{1,N}$ – количество компонент (веществ), участвующих в электрохимических процессах переноса заряда; z_i – заряд ионов (валентность) i-го вещества; F – постоянная Фарадея ($F = 96485{,}3$ Кл/моль); c_i – молярная концентрация ионов i-го вещества, u_i – абсолютные подвижности носителей заряда i-го вещества; $G(\mathbf{r};\mathbf{r}')$ – функция Грина, выражаемая с помощью ньютонова потенциала $\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^{-1}$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\vec{\nabla}\varphi_{Эл}$ ($\varphi_{Эл}$ – потенциал, получаемый из гра-

ничных условий на электродах); D_{ik} – матрица электрохимических коэффициентов диффузии i-го вещества; χ_i – изменение (рождения/исчезновения) массы m_i i-й компоненты смеси в единицу времени на единицу объема за счет химической реакции или ионизации; $k = \overline{1,B}$ – количество химических реакций; $\alpha_{i,k}$ – стехиометрический коэффициент i-го компонента в k-й химической реакции; $\kappa_{VGi,k}$ – константа скорости i-го компонента в k-й химической реакции; ϑ_i – порядок реакции i-го компонента в k-й химической реакции. В статье [3] авторами была проведена проверка на адекватность выводов модели (1), где было показано, что из этой системы естественно следует понятие двойного электрического слоя возле поверхности электрода. В работе [4] были получены аналитические выражения и построенные на них численные результаты с помощью моделирования тестовой задачи в геометрии простой структуры типа плоского полупространства, полностью совпавшие с классическими формулами электрохимического анализа [5].

Анализ особенностей системы (1) при моделировании электрохимической ячейки

Сразу необходимо отметить, что электрохимическая ячейка не представляет собой какой-то конкретной стандартной (общепринятой) структуры, а имеет большую вариацию по конструктиву и схемам измерительного процесса [5–7]. Например, электроды – индикаторный (рабочий), сравнения, вспомогательный и т.д. – могут существенно отличаться по размерам и форме с целью увеличения плотности тока и напряженности электрического поля вблизи, а также снижения вносимых искажений. В качестве индикаторного электрода может выступать капля ртути для постоянного обновления поверхности электрода и ее высокого качества, а электродом сравнения может служить газ водород на поверхности платины. В общем случае под электродом понимается граница раздела фаз, на которой происходит смена направленного движения электронов на направленное движение ионов и наоборот.

Все это усложняет требование нужной точности вычисления производной функции Грина $G(\mathbf{r};\mathbf{r}')$ в интеграле для потенциала системы (1) при моделировании работы электрохимической ячейки в конкретной геометрии [3]. Собственно точность моделирования зарядовой структуры электрохимической ячейки в первую очередь зависит от того, насколько удачно и адекватно аппроксимирована функция Грина для соответствующего объемного интеграла. Этому способствует то, что при проведении практических работ экспериментаторы стараются подобрать электроды наиболее простой формы для упрощения процессов анализа и интерпретации полученных данных [5, 7].

Наиболее простой вариант электрохимической ячейки представляет собой конденсатор с электролитом в качестве диэлектрической прослойки между обкладками. Для цилиндрической геометрии электродов такой ячейки производную функции Грина и соответствующий интеграл можно аналитически упростить до одномерного, что и будет показано ниже на конкретном примере.

Еще одной особенностью электрохимической ячейки является локализация процессов диффузии и химических превращений. Это приводит к тому,

что система (1) распадается на ряд более простых уравнений, описывающий тот или иной тип физико-химического явления. В то же время это накладывает более жесткие требования к точности вычисления интеграла с производной функции Грина, так как его влияние носит существенный характер именно у границы электрода, а не вдали, где геометрические особенности электростатического поля сглаживаются. Если же процессы в электрохимической ячейке ограничиваются временем не более 1 мин, то конвекционный член $\tilde{\nabla}\cdot(c_i\mathbf{v}_C)$ в системе (1) можно не учитывать. В противоположность этому для сильно конвекционного процесса – вращающийся электрод – система (1) для постоянного воздействия быстро стремится к стационарному решению $\partial c_i/\partial t = 0$.

Далее для замедленной (необратимой) реакции разряда-ионизации характерно минимальное влияние диффузии частиц из электролита, так как она успевает подвести реагенты к электроду и отвести продукты реакции. Поэтому такие электрохимические процессы описываются на уровне связи плотности тока через ячейку и потенциалов на электродах

$$j(\eta) = j_0 \exp\left(\frac{\beta z F}{RT}\eta\right),$$

где j_0 – ток обмена на индикаторном электроде; β – коэффициент переноса; z – число электронов, участвующих в электрохимической реакции; η – перенапряжение на межфазной границе; T – абсолютная температура; R – универсальная газовая постоянная.

В противоположном случае, когда скорость химической реакции значительно превышает скорость диффузионного транспорта (хорошо обратимый процесс), тогда работа в электрохимической ячейке описывается на уровне миграции частиц в электролите, потенциалы на электродах при этом удовлетворяют уравнению Нернста [5–7]. К этому описанию может добавиться наличие в ячейке ионных мембран.

Собственно указанная специфика как раз и позволяет составлять курс аналитической электрохимии в виде отдельных описаний элементов процесса диффузии, связи потенциала на межфазовой границе с плотностью тока через электрод, актов химической реакции в объеме электролита и на поверхности электрода и т.д. Такой подход также дополняется рядом соотношений термодинамики химических процессов, позволяющих заполнить пробелы в интерпретации поведения заряженных частиц и связать разные области электрохимической ячейки.

Преимущество системы (1) заключается в объединении большей части этих явлений, что позволяет идти при анализе электрохимических процессов от общего к частному и не упустить какого-либо важного составляющего звена при моделировании.

Необходимо отметить, что система (1) не учитывает явлений сорбции на поверхности или в объеме электродов. Это связано с тем, что, несмотря на наличие описаний механизмов физической или химической абсорбции/адсорбции, на практике используются эмпирические или полуэмпирические выражения для связи массы сорбата с парциальным давлением или кон-

центрации в жидкой среде. Формальное место в уравнениях системы (1) процессов сорбции должно находиться в выражении, связанном с взаимодействием частиц электролита с частицами электрода, и определяться с помощью законов квантовой химии, а в динамике ансамблей – с помощью теории перколяций [8]. Поэтому в рамках континуальной модели ввести эти составляющие в систему (1) было невозможно. Как альтернатива этому, возможно введение нового «сорта» частиц, получающихся в результате квазихимических реакций «сорбции» и «десорбции» и существенно локализованных вблизи поверхности электрода. Но для системы (1) это всего лишь приведет к дополнительному уравнению и останется в рамках той же методологической парадигмы.

Для некоторых типов электродов, например состоящих из химически неактивных, но проводящих (полупроводниковых) материалов, в их объеме могут также возникать специфические зарядовые структуры, вроде электронно-дырочных двойных электрических слоев. Для системы (1) это опять же приведет к дополнительным уравнениям, описывающим новые «сорта» частиц (электроны, дырки) в области электрода и связанные на границе раздела фаз с другими уравнениями общими условиями взаимодействия заряженных частиц. То есть опять же данная специфика решается в рамках модели (1). Кстати, этот подход также является способом учета нелинейного влияния двойного электрического слоя, включая адсорбированные атомы и ионы, на потенциал электродов $\varphi_{Эл}$, генерируемый в приэлектродном пространстве электрохимической ячейки.

Моделирование нелинейных диссипативных структур

Далее рассмотрим пример того, как в рамках системы (1) описываются диссипативные структуры в электрохимической ячейке, вроде автоволновых химических процессов [9], формулируемые более общими уравнениями неразрывности и законами сохранения вещества.

Пусть на индикаторном электроде протекает реакция, в которой окисленная форма O принимает z электронов и превращается в восстановленную форму R по следующей схеме:

$$O + ze^- \underset{\overleftarrow{k}_e}{\overset{\vec{k}_e}{\rightleftarrows}} R, \qquad (2)$$

где $\vec{k}_e$, $\overleftarrow{k}_e$ – константы скорости гетерогенного переноса заряда в катодном и в анодном процессах соответственно.

Выберем геометрию плоского круглого конденсатора. В этом случае, пренебрегая неоднородностями поля на краях электродов, решение системы (1) должно зависеть только от одной пространственной переменной $c_i = c_i(x,t)$, где ось x перпендикулярна плоскости электрода, центр которого находится в начале координат $x \equiv 0$.

В силу вида реакции (2) система (1) для индикаторного электрода будет состоять из двух уравнений относительно окисленной формы O и восстановленной формы R, т.е. $N = 2$. Обозначим соответствующие концентрации че-

рез c_O и c_R. В приближении невозмущенного краевыми эффектами потенциала взаимодействующих заряженных частиц электролита [3] система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial c_R}{\partial t} - \tilde{D}_R \frac{\partial^2 c_R}{\partial x^2} = -u_R \frac{\partial c_R}{\partial x} \cdot \left[\frac{4\pi}{\varepsilon} d_x + E_x \right] - c_R \frac{4\pi}{z_R \varepsilon} \left(z_R c_R + z_O c_O \right), \qquad (3)$$

$$\frac{\partial c_O}{\partial t} - \tilde{D}_O \frac{\partial^2 c_O}{\partial x^2} = -u_O \frac{\partial c_O}{\partial x} \cdot \left[\frac{4\pi}{\varepsilon} d_x + E_x \right] - c_O \frac{4\pi}{z_O \varepsilon} \left(z_R c_R + z_O c_O \right), \qquad (4)$$

где

$$d_x = d(x,t) = F \int_0^l (x - x') g(x - x') (z_O c_O(t,x') + z_R c_R(t,x')) dx',$$

$$g(x - x') = 2\pi \left(1 \Big/ \sqrt{(x - x')^2 + r_e^2} - 1 \Big/ |x - x'| \right);$$

r_e – радиус электрода; l – расстояние между обкладками-электродами.

Начальные условия для простоты выбираются однородными с момента $t = 0$, т.е. $c_R(0,x) = c_{R0}$ и $c_O(0,x) = c_{O0}$. Такой выбор, вообще говоря, означает, что двойной электрический слой в начальный момент отсутствует $d_x(x,0) = 0$, так как электролит в целом должен быть электронейтральным, т.е. $z_R c_{R0} + z_O c_{O0} = 0$. Это не соответствует действительной ситуации, так как, например, при проведении хронопотенциометрического анализа первый этап электрохимического процесса заключается в зарядке двойного электрического слоя. Однако в дальнейшем будет рассматриваться стационарный случай в смысле устойчивого состояния равновесия, поэтому эта неточность не принципиальна.

Краевые условия можно составить с учетом закона непрерывности протекания заряда через электрохимическую ячейку:

– для уравнения (3):

$$\frac{\partial c_R(t,0)}{\partial x} - \frac{u_R}{\tilde{D}_R} \left[\frac{4\pi}{\varepsilon} d_x + E_x \right] c_R(t,0) = -\frac{j_R}{z_R F \tilde{D}_R} \theta(t),$$

$$\frac{\partial c_R(t,l)}{\partial x} - \frac{u_R}{\tilde{D}_R} \left[\frac{4\pi}{\varepsilon} d_x + E_x \right] c_R(t,l) = \frac{j_R}{z_R F \tilde{D}_R} \theta(t);$$

– для уравнения (4):

$$\frac{\partial c_O(t,0)}{\partial x} - \frac{u_O}{\tilde{D}_O} \left[\frac{4\pi}{\varepsilon} d_x + E_x \right] c_O(t,0) = \frac{j_O}{z_O F \tilde{D}_O} \theta(t),$$

$$\frac{\partial c_O(t,l)}{\partial x} - \frac{u_O}{\tilde{D}_O} \left[\frac{4\pi}{\varepsilon} d_x + E_x \right] c_O(t,l) = -\frac{j_O}{z_O F \tilde{D}_O} \theta(t).$$

Здесь $j_R = zF\vec{k}_e c_R$, $j_O = zF\overleftarrow{k}_e c_O$, $z = z_O - z_R$. Как указывалось выше, будем рассматривать установившийся процесс равновесия в ячейке, т.е. когда функциональная зависимость от времени отсутствует, а общая плотность тока через ячейку $j = j_O + j_R \equiv 0$ и напряжение электрического поля $E_x \equiv 0$.

Для стационарного случая уравнения (3), (4) можно уже представить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\tilde{D}_R \frac{d^2 c_R}{dx^2} - u_R d_0 \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{dc_R}{dx} - \frac{4\pi}{z_R \varepsilon} \left(z_R c_R + z_O c_O \right) c_R = 0, \tag{5}$$

$$\tilde{D}_O \frac{d^2 c_O}{dx^2} - u_O d_0 \frac{4\pi}{\varepsilon} \frac{dc_O}{dx} - \frac{4\pi}{z_O \varepsilon} \left(z_R c_R + z_O c_O \right) c_O = 0, \tag{6}$$

где $d_0 = d_0(x) = \lim\limits_{t \to \infty} d(x,t)$, со следующими краевыми условиями:

– для уравнения (5):

$$\frac{dc_R(0)}{dx} = -\left(\frac{4\pi}{\varepsilon} u_R d_0(0) + \vec{k}_e \right) \frac{c_R(0)}{\tilde{D}_R},$$

$$\frac{dc_R(l)}{dx} = -\left(\frac{4\pi}{\varepsilon} d_0 u_R(l) - \vec{k}_e \right) \frac{c_R(l)}{\tilde{D}_R};$$

– для уравнения (6):

$$\frac{dc_O(0)}{dx} = -\left(\frac{4\pi}{\varepsilon} u_O d_0(0) - \overleftarrow{k}_e \right) \frac{c_O(0)}{\tilde{D}_O},$$

$$\frac{dc_O(l)}{dx} = -\left(\frac{4\pi}{\varepsilon} u_O d_0(l) + \overleftarrow{k}_e \right) \frac{c_O(l)}{\tilde{D}_O}.$$

Если интерпретировать переменную x не как пространственную, а как временную, то можно увидеть, что система (5), (6) представляет собой два связанных нелинейных осциллятора. Не исключено, что для некоторых значений параметров электролита и электрохимической реакции (2) вполне могут существовать решения системы (5), (6) апериодической и квазипериодические пространственной структуры, соответствующие известным примерам тьюринговых систем из химии и биофизики.

Если же флуктуации концентраций реагентов от начальных значений c_{R0} и c_{O0} достаточно малы, чтобы считать интегральный член $d(t) \approx 0$, а приближения $c_O^2 \approx 2c_O$ и $c_O^2 \approx 2c_O$ верными, то система (5), (6) редуцируется к полностью линейной системе с линейными краевыми условиями по типу упругих сил. Предварительный математический анализ показывает, что у линеаризованной системы апериодических или квазипериодических пространственных структур быть не может. Этот результат коррелирует с тем известным фактом, что сложные стохастические и квазистохастические пространственно-временные образования, характерные для тьюринговых систем, яв-

ляются результатом действия нелинейности вдали от точек равновесия линеаризованных систем [9].

О постановке обратной задачи на основе системы (1)

Даже на примере упрощенной системы (5), (6) для реакции (2) видно, что обратная задача представляет собой существенные трудности как из-за наличия нелинейности, так и благодаря интегральному члену.

Очевидно, что возможности получить полностью аналитическое решение для обратной задачи даже в виде (5), (6), а тем более (1), фактически нет, поэтому определяющую роль при решении обратной задачи в данном случае играют приближенные или численные методы, такие как проекционные сеточные или бессеточные методы на основе минимизации нелинейного функционала погрешности решения [10–12].

Для системы (1) и (5), (6) подойдут формулировки всех обратных задач (эволюционных, краевых, коэффициентных и т.д.) [13].

Кажется, что для системы (1) не следует ожидать повышенную неустойчивость по сравнению с обратными задачами для систем нелинейных уравнений в частных производных, так как несмотря на то, что в рассматриваемые уравнения и краевые условия для них входят интегралы, последние являются сингулярными и слабосингулярными, т.е. имеют обратный ограниченный оператор, хотя и не являющийся всюду непрерывным. Поэтому при их численном решении вполне можно было бы применять классические методы регуляризации некорректных задач (методы Тихонова, Морозова, Иванова, Лаврентьева и т.д.) [13, 14].

Однако для системы (5), (6) данный интеграл, несмотря на наличие сингулярного ядра $g(x-x')$, не является сингулярным, а оказывается фредгольмовским интегралом типа свертки. Аналогичная ситуация наблюдается и в примере с полуплоскостью [4] при разложении функции Грина в ряд. Поэтому данный интеграл может увеличить неустойчивость возможных обратных задач и для их регуляризации потребуется отдельный анализ.

Список литературы

1. **Геращенко, С. И.** Вопросы моделирования электрохимических методов и средств контроля динамики воспалительных процессов / С. И Геращенко, С. М. Геращенко, Е. В. Кучумов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 3 (15). – С. 165–172.
2. **Геращенко, С. М.** Построение замкнутой математической модели электрохимических методов и средств оценки состояния биологических объектов / С. М. Геращенко // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 90–97.
3. Анализ и проверка адекватности выводов замкнутой системы интегродифференциальных уравнений, описывающих работу электрохимической ячейки / С. И. Геращенко, С. М. Геращенко, Е. В. Кучумов, Н. О. Голотенков, М. В. Маркулева, С. П. Кравцова, Н. В. Шпенглер // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 3 (23). – С. 47–58.
4. **Геращенко, С. И.** Моделирование тестовой задачи на основе замкнутой системы интегродифференциальных уравнений, описывающих работу электрохимической ячейки / С. И. Геращенко, С. М. Геращенко, Е. В. Кучумов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 4 (24). – С. 115–124.

5. **Захаров, М. С.** Хронопотенциометрия (Методы аналитической химии) / М. С. Захаров, В. И. Баканов, В. В. Пнев. – М. : Химия, 1978. – 200 с.
6. **Феттер, К.** Электрохимическая кинетика / К. Феттер – М. : Химия, 1967. – 856 с.
7. **Гороховская, В. И.** Практикум по электрохимическим методам анализа : учеб. пособие для студентов вузов / В. И. Гороховская, В. М. Гороховский. – М. : Высшая школа, 1983. – 192 с.
8. **Тарасевич, Ю. Ю.** Перколяция: теория, приложения, алгоритмы : учеб. пособие / Ю. Ю. Тарасевич. – М. : Едиториал УРСС, 2002. – 112 с.
9. **Васильев, В. А.** Автоволновые процессы / В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно ; под ред. Д. С. Чернавского. – М. : Наука, 1987. – 240 с.
10. **Беллман, Р.** Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Р. Беллман, Р. Калаба. – М. : Мир, 1968. – 184 с.
11. **Дэннис, Дж.** Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р. Шнабель. – М. : Мир, 1988. – 440 с.
12. **Горбаченко, В. И.** Обучение сетей радиальных базисных функций методом доверительных областей для решения уравнения Пуассона / В. И. Горбаченко, М. В. Жуков // Информационные технологии. – 2013. – № 9. – С. 65–70.
13. **Самарский, А. А.** Численные методы решения обратных задач математической физики : учеб. пособий / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Изд. 3-е. – М. : Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
14. **Ягола, А. Г.** Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике / А. Г. Ягола, В. Янфей, И. Э. Степанова, В. Н. Титаренко. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2014. – 216 с.

References

1. Gerashchenko S. I., Gerashchenko S. M., Kuchumov E. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2010, no. 3 (15), pp. 165–172.
2. Gerashchenko S. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2011, no. 2 (18), pp. 90–97.
3. Gerashchenko S. I., Gerashchenko S. M., Kuchumov E. V., Golotenkov N. O., Markuleva M. V., Kravtsova S. P., Shpengler N. V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2012, no. 3 (23), pp. 47–58.
4. Gerashchenko S. I., Gerashchenko S. M., Kuchumov E. V. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2012, no. 4 (24), pp. 115–124.
5. Zakharov M. S., Bakanov V. I., Pnev V. V. *Khronopotentsiometriya (Metody analiticheskoy khimii)* [Chronopotentiometry]. Moscow: Khimiya, 1978, 200 p.
6. Fetter K. Elektrokhimicheskaya kinetika [Electrochemical kinetics]. Moscow: Khimiya, 1967, 856 p.
7. Gorokhovskaya V. I., Gorokhovskiy V. M. *Praktikum po elektrokhimicheskim metodam analiza: ucheb. posobie dlya studentov vuzov* [Tutorial on electrochemical analysis methods: tutorial for university students]. Moscow: Vysshaya shkola, 1983, 192 p.
8. Tarasevich Yu. Yu. *Perkolyatsiya: teoriya, prilozheniya, algoritmy: ucheb. posobie* [Percolation: theory, applications, algorithms: tutorial]. Moscow: Editorial URSS, 2002, 112 p.
9. Vasil'ev V. A., Romanovskiy Yu. M., Yakhno V. G. *Avtovolnovye protsessy* [Autowave processes]. Moscow: Nauka, 1987, 240 p.

10. Bellman R., Kalaba R. *Kvazilinearizatsiya i nelineynye kraevye zadachi* [Quasilinear and nonlinear boundary problems]. Moscow: Mir, 1968, 184 p.
11. Dennis Dzh., Shnabel' R. *Chislennye metody bezuslovnoy optimizatsii i resheniya nelineynykh uravneniy* [Numerical methods of unconstrained optimization and solution of nonlinear equations]. Moscow: Mir, 1988, 440 p.
12. Gorbachenko V. I., Zhukov M. V. *Informatsionnye tekhnologii* [Information technologies]. 2013, no. 9, pp. 65–70.
13. Samarskiy A. A., Vabishchevich P. N. *Chislennye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoy fiziki: ucheb. posobiy* [Numerical methods of solution of inverse problems of mathematical physics: tutorial]. Moscow: Izd-vo LKI, 2009, 480 p.
14. Yagola A. G., Yanfey V., Stepanova I. E., Titarenko V. N. *Obratnye zadachi i metody ikh resheniya. Prilozheniya k geofizike* [Inverse problems and methods of solution thereof. Applications in geophysics]. Moscow: Binom. Laboratoriya znaniy, 2014, 216 p.

Геращенко Сергей Иванович
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой медицинской кибернетики и информатики, Медицинский институт, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: sgerash@inbox.ru

Gerashchenko Sergey Ivanovich
Doctor of engineering sciences, professor, head of sub-department of medical cybernetics and informatics, Medical Institute, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Геращенко Сергей Михайлович
доктор технических наук, профессор, кафедра медицинской кибернетики и информатики, Медицинский институт, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: sgerash@inbox.ru

Gerashchenko Sergey Mikhaylovich
Doctor of engineering sciences, professor, sub-department of medical cybernetics and informatics, Medical Institute, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Кучумов Евгений Владимирович
кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт физических измерений (Россия, г. Пенза, ул. Володарского, 8/10)

E-mail: evgenii_kuchumov@mail.ru

Kuchumov Evgeny Vladimirovich
Candidate of engineering sciences, senior staff scientist, Research Institute of Physical Measurements (8/10 Volodarskogo street, Penza, Russia)

УДК 53.082.8, 51-73, 517.9

Геращенко, С. И.

Анализ особенностей системы интегродифференциальных уравнений, описывающих состояние медико-биологических объектов с ионным типом проводимости / С. И. Геращенко, С. М. Геращенко, Е. В. Кучумов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 1 (33). – С. 78–88.